

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Συνέχεια Φυλλο #2

4) Αρχίμεδου (Εύκολη)

5) $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $(b, c) = 1$
 $(\frac{b}{c})^m = a$, $m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow c = \pm 1$

$$\text{Έστω } (\frac{b}{c})^m = a \Rightarrow b^m = c^m \cdot a \Rightarrow c^m \mid b^m \Rightarrow b^m = c^m \cdot k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (c^m, b^m) = |c|^m \Rightarrow (b, c) = 1 \Rightarrow (b^m, c^m) = 1 \Rightarrow |c|^m = 1$$

$$\text{Άρα } |c|^m = 1 \text{ και } c \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow c = \pm 1$$

6) α Έστω a διαίρετος του p^k και έστω q πρώτος
διαίρετος του $a \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \parallel p^k = p \cdot p \cdot \dots \cdot p \\ q \text{ πρώτος} \end{array} \right. \Rightarrow q \mid p \Rightarrow q = p$

Άρα, λαμβάνοντας ότι οι πρώτοι διαιρέτες του a είναι
 p . Άρα, οι διαιρέτες του p^k είναι p^m
με $0 < m \leq k$. $1, p, p^2, \dots, p^k$.

β. $\sigma: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ $n \mapsto \sigma(n) = \text{το αθρ. των διαιρετών του } n$

$$\sigma(2) = 1 + 2 = 3$$

$$\sigma(3) = 1 + 3 = 4$$

$$\sigma(4) = 1 + 2 + 4 = 7$$

$$\sigma(6) = \underbrace{1+2}_{\sigma(2)} + \underbrace{3+6}_{3 \cdot \sigma(2)} = \sigma(2) \cdot (1+3) = \sigma(2) \cdot \sigma(3)$$

Αλλά, το $\sigma(2) \cdot \sigma(2) = 3 \cdot 3 = 9 \neq 7 = \sigma(4)$

Άρα, η σωματιοσυνάρτηση σ είναι πολλαπλασιαστική αλλά όχι naïve

$$\sigma(p^k) = \frac{1 - p^{k+1}}{1 - p}, \quad p: \text{πρώτος}$$

$$\sigma(p^k) = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}$$

Όταν p πρώτος, οι διαιρετές του p^k είναι τριγωνικές με $0 \leq l \leq k$

$$\sigma(p^k) = \sum_{l=0}^k p^l = 1 + p + p^2 + \dots + p^k = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}$$

• Εάν $(a, b) = 1$ και δίνω βήματα της γενικεύσεως $a < b$, $a, b \in \mathbb{N}^*$ τότε $\sigma(ab) = \sigma(a) \cdot \sigma(b)$

Αν $c|a$ και $c \nmid b$, τότε δεν υπάρχει πρόβλημα

Αν $c \nmid a$ και $c|b$, " " " " " "

Αν $c \nmid a$ και $c \nmid b$:

τότε $cd = ab$. Αν γραφεί ο c στην πρωτογενή του αναλυση τότε κάθε πρώτος που θα διαιρεί τον c , θα διαιρεί αποκλειστικά ή το a ή το b (οχι και τα 2 γιατί τότε $(a, b) \neq 1$)

Άρα, $c = c_1 \cdot c_2$ με $c_1|a$ και $c_2|b$

(4) Για κάθε διαιρέτη q του a και r του b έχουμε ότι qr είναι διαιρέτης του ab

$\sigma(ab)$ = αθροισμα διαιρετών του ab

- Ανο των $(1/\sim)$ (στην περίπτωση που διαίρει μόνο το a)

$$q + qr = q(1+r)$$

Η r του b θα έχουμε το $r\sigma(a)$ μέσα στο άδραστη $\sigma(ab)$, και αυτό μας δίνει τους διαιρετές του b

$$\text{Άρα } \sigma(qb) = \sigma(q) \cdot \sigma(b)$$

$$\sigma(ab) = \sigma(a) \cdot \sigma(b)$$

Μ (βλ. φωνος)

$$\sigma(a) = a_1 + a_2 + \dots + a_l \leftarrow \text{διαρ. του } a$$

$$\sigma(b) = b_1 + b_2 + \dots + b_m \leftarrow \text{διαρ. του } b$$

$$b_i(a_1 + a_2 + \dots + a_l) = b_i \sigma(a)$$

$$\sum_{i=1}^m b_i \sigma(a) = \sigma(a) \sigma(b)$$

$i=1$

7) Ανο θ ευθείαν έχουμε χρησιμοποιήσει ότι $p_1, p_2, \dots, p_{l+1}$ είναι πρώτοι με $2 = p_1 < p_2 < \dots < p_l$ διαδοχικά πρώτοι. Αυτό σε συνδυασμό με $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots + 1$

Κάθε φυσικός είναι της μορφής

$$\text{Άρα } 4k \neq 2p_2 p_3 \dots p_{l+1} \rightarrow \text{πρώτος}$$

$$4k+1 \neq 2p_2 p_3 \dots p_{l+1} \rightarrow \text{Αν } 4k+1 = 2p_2 p_3 \dots p_{l+1} \Rightarrow$$

$$\text{Άρα } 4k+2 \neq 2p_2 p_3 \dots p_{l+1} \rightarrow \text{πρώτος} \quad \left| \Rightarrow \underline{2k = p_2 \dots p_l} \right. \begin{matrix} \text{αυτός} \\ \text{πρώτος} \end{matrix}$$

$$4k+3 = 2p_2 p_3 \dots p_{l+1}$$

Αναγκαστικά

ΔΙΑΦΑΝΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ (ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ)

1) Βρες ΜΚΔ. Αν διαίρει τον σταθ όρο έχουμε λύση

2) Γράψε το ΜΚΔ ως γραμ. συν. των συντελεστών και θα σου δώσει μια λύση (x_0, y_0)

3) Η γενική λύση θα είναι: $x = x_0 + \frac{b}{(a,b)}t$, $y = y_0 - \frac{a}{(a,b)}t$

2) ΝΑΟ $a|b \Leftrightarrow a^y|b^y$

ΝΥΕΗ

$(\Rightarrow)$ Ξοχύν $a|b$ έστω τώρα ότι $a^k|b^k$ και θάο $a^{k+1}|b^{k+1}$

(ΜΑΘ. ΕΠΑΓΩΓΗ)

$$a^{k+1}|b^{k+1} \Leftrightarrow a^{k+1} = k_1 b^{k+1} \Leftrightarrow a^k \cdot a = k_1 b^k \cdot b \quad (1)$$

$$\text{Αλλά, } a^k|b^k \Leftrightarrow a^k = k_2 \cdot b^k$$

$$\text{Άρα, } (1) \sim k_2 \cdot b^k \cdot a = k_1 b^k \cdot b \Leftrightarrow a = \frac{k_1}{k_2} b \Leftrightarrow a = \mu \cdot b$$

$$\text{όπου } \mu = \frac{k_1}{k_2}, k_2 \in \mathbb{Z}^*, k_1 \in \mathbb{Z}, \mu \in \mathbb{Z}$$

Άρα, $a|b$ ξοχύν.

$(\Leftarrow)$ Έστω $a^y|b^y$ και θάο $a|b$

Ξων περίπτωσης όπου το $a=1$ είναι προφανές

Ενδεώς, εξετάζουμε το $a \geq 2$

Έστω $K = \{p_1, \dots, p_k\}$ το σύνολο των πρώτων που διαβαύν
τουλάχιστον έναν από τους a & b . Τότε, θα $\exists a_i, b_i \geq 0$
ώστε: $a = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$ & $b = p_1^{b_1} \dots p_k^{b_k}$ (να γραφονται
συντάξη σε κανονική μορφή)

Άρκει τώρα νδο $a_i \leq b_i, i=1, 2, \dots, k$

$$a^y = p_1^{a_1 y} \dots p_k^{a_k y} \quad \& \quad b^y = p_1^{b_1 y} \dots p_k^{b_k y}$$

$$\text{Άρα, } a^y|b^y \Rightarrow p_1^{y a_1} \dots p_k^{y a_k} | p_1^{y b_1} \dots p_k^{y b_k} \Rightarrow y \cdot a_i \leq y \cdot b_i$$

$$\Rightarrow a_i \leq b_i, i=1, 2, \dots, k. \Rightarrow a|b.$$

3) Αν $a = 2^k(2l+1)$ και $b = 2^m(2d+1)$ με $k, m \in \mathbb{N}$ και $l, d \in \mathbb{Z}$
 τότε ισχύει $(a, b) = 2^k(l-d, 2d+1)$

ΠΕΡΙ

Το a και b περιγράφουν όλες τις μορφές ακεραίων
 (δηλ. όλους τους ακεραίους).

• Αν $k \leq m$, τότε:

$$\begin{aligned} (a, b) &= (2^k(2l+1), 2^k(2d+1)) = 2^k(2l+1, 2d+1) = \\ &= 2^k(2l+1 - (2d+1), 2d+1) = 2^k(2(l-d), 2d+1) = \\ &= 2^k(l-d, 2d+1). \end{aligned}$$

• Αν $k > m$ τότε θεωρούμε ότι:

$$\begin{aligned} \delta &= (2^k(2l+1), 2^m(2d+1)) = \\ &= 2^k(2l+1, 2^{m-k}(2d+1)) = 2^k(2l+1, 2d+1) = \\ &= 2^k(2(l-d), 2d+1) = 2^k(l-d, 2d+1) \end{aligned}$$

4) ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

(Για πολλά χρόνια κυριαρχούσε η αντίληψη ότι
αν ο p πρώτος τότε και ο $2^p - 1$ πρώτος ανακάλυψε)
Αυτό ισχύει μόνο για $p = 2, 3, 5, 7$

ΔΕΝ ισχύει όμως για $n=11$ αφού $2^{11} - 1 = 2.047$

$$\text{Ενώ } 2047 = 23 \cdot 89$$

Αρα, ο ελάχιστος πρώτος που καταγράφηκε των
Ισχυρισμών του Μάρσεν είναι ο $p = 11$.

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Ο ΦΕΡΜΑ ΠΙΣΤΕΥΕ ΟΤΙ ΟΙ ΔΙΕΡΓΑ ΑΦΕΘΗΟΙ ΜΑΡΣΕΝ
 $F_n = 2^{2^n} + 1$, $n \in \mathbb{N}$ είναι πρώτοι.

Για $n = 0, 1, 2, 3, 4$ είχε δίκιο

Αργότερα, ήλθε ο Οίλερ και ανέδειξε ότι

για $n = 5 \rightarrow F_5 = 2^{2^5} + 1 = 4.294.967.297$ σύνθετος

και μάλιστα $4.294.967.297 = 641 \cdot 6.700.417$.

Αρα ο μεγαλύτερος ελάχιστος Φερμικός είναι ο $n = 5$

(με τη μεθοδολογία αντιστοιχείται αντιστοιχία εντός)

5) Να λύσετε οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

α. $256x + 337y = 179$ (Ε₀)

$$337 = 1 \cdot 256 + 81$$

$$256 = 3 \cdot 81 + 13$$

$$81 = 6 \cdot 13 + 3$$

$$13 = 4 \cdot 3 + 1 \leftarrow \text{MCD (ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ)}$$

$$1 = 13 - 4 \cdot 3 = 13 - 4(81 - 6 \cdot 13) = 13 - 4 \cdot 81 + 24 \cdot 13 = 25 \cdot 13 - 4 \cdot 81 =$$

$$= 25(256 - 3 \cdot 81) - 4 \cdot 81 = 25 \cdot 256 - 79 \cdot 81 =$$

$$= 25 \cdot 256 - 79(337 - 256) = 25 \cdot 256 + 79 \cdot 256 - 79 \cdot 337 =$$

$$= 104 \cdot 256 + (-79) \cdot 337 \Rightarrow 179 \cdot 1 = (179 \cdot 104) \cdot 256 + (-79 \cdot 179) \cdot 337$$

$$\Rightarrow 179 = 18 \cdot 616 \cdot 256 + (-14141) \cdot 337$$

Άρα, μια ιδιότητα όλα της (Ε₀) είναι η

$$(x_0, y_0) = (18 \cdot 616, -14141)$$

Επομένως, όλες οι υπολοίτες λύσεις της, δίνονται από:

$$x = 18 \cdot 616 + \frac{337}{1} \cdot t = 18 \cdot 616 + 337t$$

ή

$$y = -14141 - \frac{256}{1} \cdot t = -14141 - 256t$$

β. $1245x - 1603y = 999$ (Ε₁)

$$1603 = 1 \cdot 1245 + 358$$

$$1245 = 3 \cdot 358 + 171$$

$$358 = 2 \cdot 171 + 16$$

$$171 = 10 \cdot 16 + 11$$

$$16 = 1 \cdot 11 + 5$$

$$11 = 2 \cdot 5 + 1 \leftarrow \text{MCD (ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ)}$$

$$1 = 11 - 2 \cdot 5 = 11 - 2(16 - 10 \cdot 11) = 3 \cdot 11 - 2 \cdot 16 = 3(171 - 10 \cdot 16) - 2 \cdot 16 =$$

$$= -32 \cdot 16 + 3 \cdot 171 = -32(358 - 2 \cdot 171) + 3 \cdot 171 =$$

$$= 67 \cdot 171 - 32 \cdot 358 = 67(1245 - 3 \cdot 358) - 32 \cdot 358 =$$

$$= 67 \cdot 1245 - 233 \cdot 358 = 67 \cdot 1245 - 233 (1603 - 1245) =$$

$$= (-233)1603 + 300 \cdot 1245 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 999 = (-232767) \cdot 1603 + (299700) \cdot 1245$$

Αρα, μία ιδιότητα π.π. είναι η $(x_0, y_0) = (299700, -232767)$

Επομένως, όλες οι υπολοίποι λύσεις δίνονται αν' τους συνόλως

$$x = 299700 + 1603t$$

$$y = -232767 - 1245t$$

γ. $5x + 7y + 14z = 1$ (ο συν $(5, 7, 14) = 1$ | 1 έχει λύσεις)

Εστω $5x + 7y = w \cdot 1$ (ο συν $(5, 7) = 1 \sim 5x + 7y = 1$)

και $w + 14z = 1$ (ο συν $(1, 14) = 1$ | 1 έχει λύσεις)

Προσέχοντας π.π. η $(x_0, y_0) = (-13, 1)$

Αρα, γενικά λύση είναι

$$w = -13 + 14t \quad \text{και} \quad y = 1 - t, \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Αλλά } w \cdot 1 = 5x + 7y \quad (1)$$

$$\left(\begin{array}{l} 7 = 2 \cdot 5 + 2 \\ 5 = 2 \cdot 2 + 1 \end{array} \right) \sim 1 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 2(7 - 5) = 3 \cdot 5 + (-2) \cdot 7$$

Μία επέκταση λύση της εξίσωσης

$$5x + 7y = 1 \quad \text{είναι η } (x_1, y_1) = (3, -2)$$

Αρα, αναγκαστικά, συν (1) $w \cdot 1 = 5x + 7y$, θα πρέπει:

$$x = 3 \cdot w \quad \text{και} \quad y = -2w$$

$$x = 3(-13 + 14t) \quad \text{και} \quad y = -2(1 - t)$$

$$\text{και βέβαια } z = 1 - t, \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

δ. Εξίσωση $(5, 7, 14) = 1$ | 33 Υπάρχουν π.π.ς της εξίσωσης και ανεξίτηλα όλοι η ε.α. (γ)